

УДК 621.165.532.6

*Розглянуто застосування неявної квазі-монотонної схеми Годунова підвищеної точності для чисельного моделювання течії в'язкої нестисливої рідини. Наведено математичну постановку задачі. Проведено розрахунок низки тестових задач та виконано зіставлення отриманих результатів*

*Ключові слова: штучна стисливість, нестислива рідина, неявна квазімонотонна схема Годунова*

*Рассмотрено применение неявной квази-монотонной схемы Годунова повышенной точности для численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости. Представлена математическая постановка задачи. Проведен расчёт ряда тестовых задач и выполнено сопоставление полученных результатов*

*Ключевые слова: искусственная сжимаемость, несжимаемая жидкость, неявная квази-монотонная схема Годунова*

*The application of an implicit quasi-monotone high accuracy Godunov type scheme to the numerical simulation of the viscous incompressible flow is viewed. The mathematical formulation of the problem is presented. Several representative problems have been solved and comparison showed good agreements*

*Key words: artificial compressibility, incompressible flow, implicit quasi-monotone Godunov type scheme*

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЯВНОЙ КВАЗИМОНОТОННОЙ СХЕМЫ ГОДУНОВА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

**А. В. Русанов**

Доктор технических наук, заведующий отделом  
Отдел гидроаэромеханики энергетических машин  
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного  
НАН Украины  
ул. Дм. Пожарского 2/10, г. Харьков, Украина, 61046  
Контактный тел.: 8 (057) 752-33-88  
E-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua

**Д. Ю. Косьянов**

Аспирант  
Национальный технический университет «Харьковский  
политехнический институт»  
ул. Фрунзе 21, г. Харьков, Украина, 61001  
Контактный тел.: 8 (0572) 95-95-21  
E-mail: kosyanovdima@rambler.ru

## 1. Введение

Для дальнейшего совершенствования проточных частей гидромашин необходимы детальное изучение и анализ физических процессов, происходящих в них. Несмотря на знание множества гидродинамических закономерностей, полученных и получаемых при проектировании и исследовании гидромашин, каждая новая проточная часть имеет свои индивидуальные особен-

ности, которые влияют на её характеристики. Важным инструментом, используемым в процессе изучения, проектирования и доводки гидромашин, является численный эксперимент, построенный на основе моделей трёхмерных вязких течений несжимаемой среды.

В последние годы достаточно успешно применяется неявная квази-монотонная схема Годунова повышенной точности для моделирования вязких течений сжимаемого газа [1, 2, 3].

В статье представлено обобщение данной схемы для численного интегрирования несжимаемых уравнений Эйлера и Навье-Стокса с дополнительным членом, содержащим искусственную сжимаемость [4, 5].

Для проверки работоспособности и оценки точности предложенного метода решен ряд тестовых задач.

## 2. Основные уравнения

Система несжимаемых уравнений Навье-Стокса, преобразованная с помощью метода искусственной сжимаемости в обобщённой криволинейной системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $x$ , имеет вид [2]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{J_*} \left( \frac{\partial J_* (E_i + E_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial J_* (F_i + F_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial J_* (G_i + G_v)}{\partial \zeta} \right) = H, \quad (1)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} P/\beta & u & v & w \end{pmatrix}^T,$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g & 2w\Omega + y\Omega^2 & -2v\Omega + z\Omega^2 \end{pmatrix}^T,$$

$$E_i = \begin{pmatrix} U & uU + \xi_x P & vU + \xi_y P & wU + \xi_z P \end{pmatrix}^T,$$

$$E_v = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_{\xi\xi} & -\tau_{\xi\eta} & -\tau_{\xi\zeta} \end{pmatrix}^T,$$

$$F_i = \begin{pmatrix} V & uV + \eta_x P & vV + \eta_y P & wV + \eta_z P \end{pmatrix}^T,$$

$$F_v = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_{\eta\xi} & -\tau_{\eta\eta} & -\tau_{\eta\zeta} \end{pmatrix}^T,$$

$$G_i = \begin{pmatrix} W & uW + \zeta_x P & vW + \zeta_y P & wW + \zeta_z P \end{pmatrix}^T,$$

$$G_v = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_{\zeta\xi} & -\tau_{\zeta\eta} & -\tau_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}^T,$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w,$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w,$$

$$W = \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w,$$

$$\xi = \xi(x, y, z), \eta = \eta(x, y, z), \zeta = \zeta(x, y, z),$$

$$J = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{pmatrix}^{-1},$$

$$J_* = \det(J^{-1}), \quad P = \frac{p}{\rho_*}.$$

Здесь  $x, y, z$  – декартовы координаты,  $\xi, \eta, \zeta$  – обобщённые криволинейные координаты,  $J$  – якобиан перехода между системами координат,  $P, p, u, v, w, \rho_*, \beta$  – кинематическое давление, давление, декартовы компоненты скорости, плотность и коэффициент искусственной сжимаемости соответственно. Предполагается, что температура жидкости постоянна.  $Q$  – вектор консервативных переменных,  $E_i, F_i, G_i$  – конвективные (невязкие) составляющие потоков,  $E_v, F_v, G_v$  – диффузионные (вязкие) составляющие потоков,  $g$  – ускорение свободного падения.

Компоненты тензора деформаций имеют вид:

$$\tau_{s\xi} = s_x \tau_{xx} + s_y \tau_{xy} + s_z \tau_{xz},$$

$$\tau_{s\eta} = s_x \tau_{xy} + s_y \tau_{yy} + s_z \tau_{yz},$$

$$\tau_{s\zeta} = s_x \tau_{xz} + s_y \tau_{yz} + s_z \tau_{zz}, \quad s = [\xi, \eta, \zeta],$$

$$\tau_{xx} = 2v \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{yy} = 2v \frac{\partial v}{\partial y}, \tau_{zz} = 2v \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = v \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = v \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = v \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

где  $v$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости (задаётся постоянным во всей расчётной области). При моделировании невязких течений жидкости диффузионные составляющие потоков берутся равными нулю ( $E_v = F_v = G_v \equiv 0$ ). Тогда система уравнений (1) соответствует несжимаемой системе уравнений Эйлера (с искусственной сжимаемостью).

Обезразмеривание переменных выполняется следующим образом:

$$\bar{P} = \frac{P}{\rho_* a_*^2}, \bar{u} = \frac{u}{a_*}, \bar{v} = \frac{v}{a_*}, \bar{w} = \frac{w}{a_*}, \bar{t} = a_* t,$$

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{a_*}, \bar{g} = \frac{g}{a_*^2}, \bar{v} = \frac{v}{a_*}.$$

где  $a_*$  – характерная скорость потока. После обезразмеривания вид уравнений не меняется, поэтому для упрощения дальнейшего описания черта над переменными опускается.

Система уравнений в недивергентной форме имеет вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A \frac{\partial q}{\partial \xi} + B \frac{\partial q}{\partial \eta} + C \frac{\partial q}{\partial \zeta} = T \cdot \text{RHS},$$

$$\text{RHS} = H - \frac{1}{J_*} \left( \frac{\partial J_* E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial J_* F_v}{\partial \eta} + \frac{\partial J_* G_v}{\partial \zeta} \right),$$

где  $q = (P \ u \ v \ w)^T$  – вектор примитивных переменных,  $T = \text{diag}(\beta, 1, 1, 1)$  – матрица перехода от примитивных переменных к консервативным переменным,  $T^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\beta}, 1, 1, 1\right)$ ,  $A = T \left( \frac{\partial E_i}{\partial Q} \right) T^{-1}$ ,

$$C = T \left( \frac{\partial F_i}{\partial Q} \right) T^{-1},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta \cdot s_x & \beta \cdot s_y & \beta \cdot s_z \\ s_x & s_x u + \Theta & s_y u & s_z u \\ s_y & s_x v & s_y v + \Theta & s_z v \\ s_z & s_x w & s_y w & s_z w + \Theta \end{pmatrix},$$

$$M = [A, B, C], \quad s = [\xi, \eta, \zeta], \quad \Theta = [U, V, W].$$

Введенные сокращения означают, что матрица  $A$  получается в случае  $s = \xi$  и  $\Theta = U$ , матрица  $B$  при  $s = \eta$  и  $\Theta = V$ , а матрица  $C$ , если  $s = \zeta$  и  $\Theta = W$ .

Диагональный вид матриц  $A, B, C$  получается из соотношений:

$$L_s M R_s = \Lambda_s, \Lambda_s = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4),$$

$$\lambda_{1,4} = \Theta \mp \sqrt{\Theta^2 + \beta \cdot s_0^2} = \Theta \mp \Theta_0, \lambda_{2,3} = \Theta,$$

$$s_0^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2,$$

где  $L_s, R_s$  – матрицы левых и правых собственных векторов собственных значений  $\lambda_i, i = 1, 4$ :

$$R_s = \begin{pmatrix} -\beta \cdot \Theta_0 & 0 & 0 & \beta \cdot \Theta_0 \\ \beta \cdot s_x + \lambda_1 u & c_x & d_x & \beta \cdot s_x + \lambda_4 u \\ \beta \cdot s_y + \lambda_1 v & c_y & d_y & \beta \cdot s_y + \lambda_4 v \\ \beta \cdot s_z + \lambda_1 w & c_z & d_z & \beta \cdot s_z + \lambda_4 w \end{pmatrix}, L_s = R_s^{-1},$$

$$c_x s_x + c_y s_y + c_z s_z = 0, d_x s_x + d_y s_y + d_z s_z = 0.$$

Значения  $c_x, c_y, c_z$  и  $d_x, d_y, d_z$  определяются из соотношения для метрических коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $L_s$  и  $R_s$  являются невырожденными.

### 3. Постановка граничных условий

Для численного решения уравнений задаются граничные условия и дополнительные соотношения на границах.

- На границе входа задаются полное давление и направление вектора скорости, а также используется уравнение Бернулли  $P_0 = p + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$  и соотношение на «приходящей» характеристике.

- На границе выхода задаётся статическое давление и используется соотношение на «приходящей» характеристике.

- На стенке для уравнений Эйлера задаётся условие  $u\psi_x + v\psi_y + w\psi_z = 0$  ( $\psi$  – направление, ортогональное к поверхности стенки в данной точке), а для ламинарных уравнений Навье-Стокса – условие прилипания  $u = v = w = 0$ . Давление на стенке определяется из соотношения:

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = x_\psi \left( \psi_x \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \psi} + \psi_y \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \psi} + \psi_z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \psi} \right) +$$

$$+ y_\psi \left( \psi_x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \psi} + \psi_y \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial \psi} + \psi_z \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \psi} \right) +$$

$$+ z_\psi \left( \psi_x \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \psi} + \psi_y \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \psi} + \psi_z \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial \psi} \right) +$$

$$+ [\psi_x H_2 + \psi_y H_3 + \psi_z H_4],$$

где  $\psi$  – сеточное направление, не параллельное стенке.

Для обеспечения разностей против потока используется упрощённый аналог задачи распада произвольного разрыва, в котором значения в области разрыва находятся из соотношений на характеристиках:

$$L_\psi dq = 0,$$

где  $\psi$  – локальное сеточное направление.

### 4. Определение коэффициента искусственной сжимаемости

Коэффициент искусственной сжимаемости предполагается постоянным, либо кусочно-постоянным внутри расчётной области. Для обеспечения высокой скорости сходимости и сохранения порядка собственных значений матриц  $A, B, C$  коэффициент искусственной сжимаемости  $\beta$  определяется как [5]:

$$\beta = \max(0.3, r(u^2 + v^2 + w^2)), r = 1 \dots 5$$

или

$$\beta = \delta_1 a_*^2 + \delta_0, \delta_1 = 5 \dots 10, 0 < \delta_0 < 1.$$

В качестве характерной скорости потока берётся максимальная скорость потока.

### 5. Численная схема

Физическая область отображается на расчётную область с помощью неструктурированной сетки с шестигранными ячейками. Такая сетка допускает локальную структуризацию. Численное интегрирование уравнений выполняется с помощью неявной квазимонотонной схемы Годунова повышенной точности [2, 3]. Подробно численный метод описан в работе [2].

Данная численная схема реализована на языке программирования FORTRAN 90 и интегрирована в программный комплекс **FlowER-U**<sup>®</sup>.

### 6. Численные результаты

С целью апробации численной модели решен ряд тестовых задач. Полученные результаты сравнивались с теоретическими и экспериментальными данными, а также результатами других авторов.

**6.1. Обтекание профиля NASA0012.** Рассмотрено обтекание невязкой жидкостью профиля NASA0012 при углах атаки  $\varphi = 0^\circ, \varphi = 3^\circ$ . На рис. 1 представлена визуализация изолиний статического давления. Полученные результаты хорошо согласуются с данными, приведенными в работе [6].

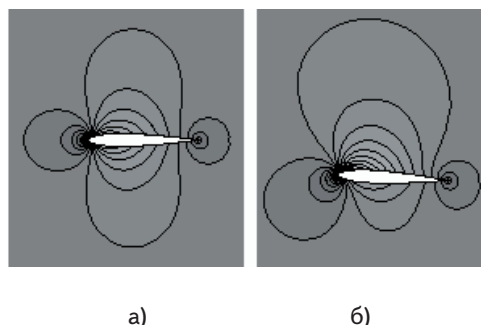


Рис. 1. Изолинии давления при угле атаки:  
а)  $\varphi = 0^\circ$ ; б)  $\varphi = 3^\circ$

**6.2. Обтекание плоской пластинки.** Выполнен расчёт вязкого ламинарного течения жидкости при условии равномерного значения скорости набегающего потока (рис. 2).

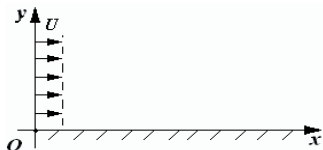


Рис. 2. Вид пластинки

На рис. 3 приведено сравнение профиля продольной компоненты скорости в пограничном слое, полученного в расчёте, с теоретическим профилем [7]. Видно, что расчётные и теоретические результаты хорошо согласуются.

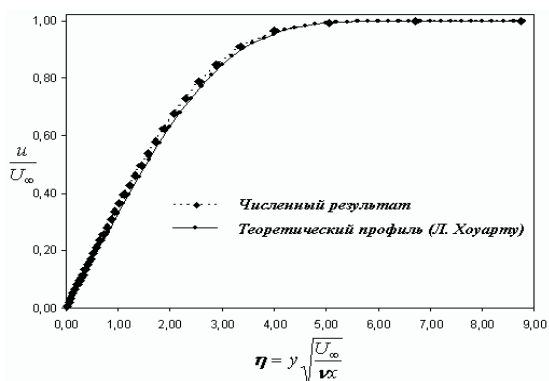


Рис. 3. Распределение продольной компоненты скорости в пограничном слое на пластине

**6.3. Обтекание профиля СИБНИА С-16.** Рассмотрено обтекание профиля СИБНИА С-16 (см. рис. 4) при скорости набегающего потока  $U_\infty = 50,7 \text{ м/с}$  и числе Рейнольдса  $Re = 1,62 \cdot 10^6$ . На рис. 5 представлено сравнение коэффициента давления, полученного в расчёте, с экспериментальными данными [8, 9] при угле атаки  $\alpha = 5,16^\circ$ .

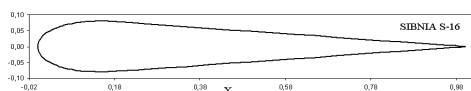


Рис. 4. Вид профиля СИБНИА С-16

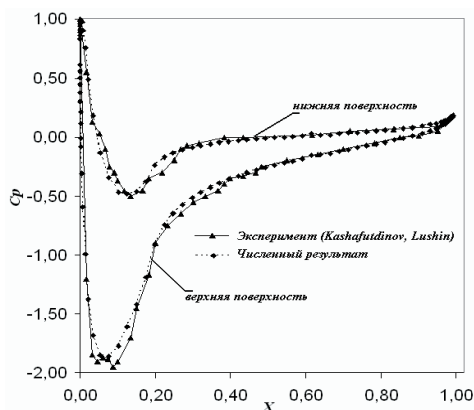


Рис. 5. Распределение коэффициента давления на поверхности профиля

Наблюдается удовлетворительное соответствие расчётных и экспериментальных данных.

## 7. Выводы

Выполнено обобщение неявной квазимонотонной схемы Годунова для моделирования вязких несжимаемых течений на основе численного интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса, содержащих дополнительный член искусственной вязкости. Полученные результаты тестовых расчётов хорошо согласуются с экспериментальными, теоретическими и численными данными других авторов.

В дальнейшей работе планируется применить рассмотренный метод для моделирования нестационарных турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости.

## Литература

1. А.с. № 77. Державне агентство України з авторських та суміжних прав. Комплекс програм розрахунку тривимірних течій газу в багатовісцевих турбомашинах "FlowER" / С.В. Ершов, А.В. Русанов. – 1996.
2. Русанов А.В. Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин / А.В. Русанов, С.В. Ершов. Монография. – Х., ИПМаш НАН Украины, 2008. – 275 с.
3. Ершов С.В. Квазимонотонная ENO схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса // Мат. моделирование. – 1994. – 6, №11. – С. 58 – 64.
4. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Тannehill, Р. Плетчер. В 2-х т. – М., Мир, 1990. – 728 с.
5. Лобарева И.Ф. Об одном подходе к оптимизации формы лопасти гидротурбины / И.Ф. Лобарева, В.А. Скороспелов, П.А. Турук, С.Г. Чёрный, Д.В. Чирков // Вычислительные технологии. – 2005. – Том 10, №6. – С. 52 – 74.
6. R. Honzatko. Numerical solution of inviscid incompressible flow over a vibrating profile / R. Honzatko, J. Horaček, K. Kozel // Proceeding of the Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics, 2005. – pp. 26 – 32.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М., Наука, 1974. – 711 с.
8. S. Cherny. An Efficient LU – TVD finite volume method for 3D inviscid and viscous incompressible flow problem / S. Cherny, Y. Gryazin, S. Sharov, P. Shashkin // Proceedings of the Third ECCOMAS CFD conference, Paris, France, 1996. – pp. 90 – 96.
9. S.T. Kashafutdinov. Atlas of Aerodynamics Characteristics of Airfoils / S.T. Kashafutdinov, V.N. Lushin // SIBNIA, Novosibirsk, 1994. – 76 p. (in Russian)